Paul Zühlke.

Über die geodätischen Linien und Dreiecke auf den Flächen konstanten Krümmungsmasses und ihre Beziehungen zur sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie.

1902
DRUCK VON REINHOLD KÜHN,
BERLIN.

Über die geodätischen Linien und Dreiecke auf den Flächen konstanten Krümmungsmasses und ihre Beziehungen zur sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie.

Inaugural-Dissertation

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Paul Zühlke,

Oberlehrer an der Städtischen Ober-Realschule zu Charlottenburg.

1902

DRUCK VON REINHOLD KÜHN,

BERLIN.

Referent:
Herr Prof. Dr. Staude, Kaiserl. russ Staatsrat a. D.

Meinen lieben Eltern.

Es giebt gewisse Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass jede auf ihnen gezeichnete, im Endlichen gelegene Figur in der Fläche selbst sich verschieben oder auf einen anderen Teil derselben sich auflegen lässt, so dass weder die Masszahlen der Winkel, noch die der Linien- und Flächengrössen eine Änderung erleiden. Für den Fall der Ebene und der Kugel bietet dieser Umstand eins der wichtigsten Hilfsmittel für die Untersuchungsmethoden der elementaren Geometrie dar.

Die genannte Eigenschaft kommt aber nicht nur der Ebene und der Kugel, sondern allen Flächen konstanten Krümmungsmasses zu, denn zwei Flächen mit demselben konstanten Krümmungsmass sind auf einander abwickelbar[1]), also ist auch jede Fläche konstanten Krümmungsmasses auf sich selbst abwickelbar[2]). „Die Flächen mit konstantem positiven Krümmungsmass lassen sich stets so formen, dass die Flächenstücke auch ohne Biegung beliebig bewegt werden können, nämlich zu Kugelflächen, die mit negativem aber nicht.“[3])

Aus dem Umstande, dass die Flächen konstanter Krümmung die Eigenschaft der „Aufeinanderlegbarkeit gleicher Figuren“ (Beltrami) besitzen, lässt sich schon vermuten, dass sie eine eigene „Geometrie“ haben; durch zahlreiche Unter-

---

[1]) Minding, Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse. Crelles Journal, Bd. 19, S. 370—387.

[2]) Vergl. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale. Pisa 1894. No. 97.

[3]) Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abg. i. 13. Bd. d. Abh. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1866—67. S. 133—152. — Werke, 2. Aufl. S. 272—287. Vgl. daselbst S. 283.

suchungen ist die Richtigkeit dieser Vermutung bestätigt und überdies dargethan worden, dass diese Geometrie bei den pseudosphärischen Flächen nicht verschieden ist von der Nicht-Euklidischen, Lobatschewskyschen Geometrie, während sie für den Fall der Flächen konstanten positiven Krümmungsmasses mit der Geometrie auf der Kugel wesentlich identisch ist, und dass dabei die geodätischen Linien auf diesen Flächen eine ganz ähnliche Rolle spielen wie die Geraden in der Ebene bezw. die grössten Kreise auf der Kugel.

Dementsprechend sollen auch im folgenden zunächst die Eigenschaften der geodätischen Linien der Flächen konstanten Krümmungsmasses behandelt, darnach unter Benutzung dieser Eigenschaften das Bestehen der erwähnten Analogieen aufgezeigt werden.

1. Die Flächen konstanter Krümmung als Liouvillesche Flächen.

Nach einem von Liouville[1]) aufgestellten Satze können die geodätischen Linien einer Fläche immer dann durch Quadraturen gefunden werden, wenn sich ein isometrisches Kurvensystem (u, v) auf der Fläche angeben lässt, für welches das Quadrat der Länge des Linienelementes die Form

$$ds^2 = [\varphi(u) + \psi(v)]\,(du^2 + dv^2)$$

hat.

Dass alle Flächen konstanten Krümmungsmasses der Liouvilleschen Flächenklasse angehören, erhellt zwar schon daraus, dass sie auf Rotationsflächen abwickelbar sind, deren Linienelemente bekanntlich die angegebene Eigenschaft besitzen, es kann aber auch direkt gezeigt werden. Nimmt man auf der Fläche ein isometrisches Koordinatensystem (u, v) an, so ergiebt sich für das Krümmungsmass[2])

$$(1) \qquad K = -\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial^2 \log E}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log E}{\partial v^2}\right) \quad ;$$

[1]) Monge, Application de l'analyse à la géométrie. 5ième édition, revue, corrigée et annotée par J. Liouville. Paris 1850. pag. 588.

[2]) Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Leipzig 1888; § 52, Formeln (6), (11).

ersetzt man diese isometrischen Koordinaten durch die ihnen gleichwertigen symmetrischen

$$w = u + vi \quad , \quad w_1 = u - vi \quad ,$$

so erhält man das Krümmungsmass in der Form

$$K = -\frac{2}{E}\frac{\partial^2 \log E}{\partial w\, \partial w_1} \quad ; \tag{2}$$

bei konstantem K ist dies eine partielle Differentialgleichung für E, von welcher Liouville [1]) das partikuläre Integral

$$E = \frac{4}{K}\frac{g'(w)\cdot g_1'(w_1)}{[g(w)-g_1(w_1)]^2}$$

angegeben hat; dabei bedeuten g, g_1 willkürliche konjugierte Funktionen. Das Quadrat der Länge des Linienelementes wird

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2) = \frac{4}{K}\frac{d\alpha\, d\alpha_1}{(\alpha-\alpha_1)^2} \quad ,$$

wenn $g(w) = \alpha$, $g_1(w_1) = \alpha_1$ gesetzt wird; bezeichnet man α_1 durch $-\frac{1}{\beta}$, so erscheint ds^2 in der Form

$$ds^2 = \frac{4}{K}\frac{d\alpha\, d\beta}{(\alpha\beta + 1)^2}$$

Ist

$$E = \varphi(u) + \psi(v) \quad ,$$

so erhält man mit Hilfe von (1)

$$2K(\varphi + \psi)^3 + (\varphi + \psi)(\varphi'' + \psi'') - \varphi'^2 - \psi'^2 = 0;$$

die Trennung der Variablen ergiebt

$$4K\varphi^3 - a\varphi^2 + b = -\varphi'^2 \quad ,$$
$$4K\psi^3 - a\psi^2 + b = -\psi'^2 \quad ,$$

wobei a und b Integrationskonstanten bedeuten; wählt man

$$a=0,\ b=0 \quad ,$$

so wird

$$\varphi(u) = \frac{1}{Ku^2} \quad , \quad \psi(v) = \frac{1}{Kv^2}$$

und

---

[1]) Sur l'équation aux différences partielles $\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$. Journ. de Math. t. XVIII, pag. 71—72; Comptes Rendus, t. 36, pag. 371—373.

$$ds^2 = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right)(du^2 + dv^2) \quad ,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Aus dem Vorigen kann man folgern:

Das Linienelement einer Fläche konstanter Krümmung ist eine automorphe Funktion seiner symmetrischen Koordinaten, d. h. eine solche, welche bei einer linearen Transformation der Variablen ungeändert bleibt.

Ist nämlich

$$\alpha^* = f(\alpha) \quad , \quad \alpha_1^* = f_1(\alpha_1)$$

eine Substitution, durch welche ein der Gleichung

$$ds^2 = \frac{4}{K}\frac{d\alpha\, d\alpha_1}{(\alpha-\alpha_1)^2}$$

genügendes Linienelement in sich selbst übergeht, so muss

$$\frac{d\alpha\, d\alpha_1}{(\alpha-\alpha_1)^2} = \frac{d\alpha^*\, f_1'(\alpha_1)\, d\alpha_1}{(\alpha-f_1(\alpha_1))^2}$$

sein; durch einfache Integration erhält man hieraus

$$\alpha^* = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q}$$

und in analoger Weise

$$\alpha_1^* = \frac{m\alpha_1 + n}{p\alpha_1 + q} \quad ,$$

was zu zeigen war; zugleich ist hierdurch dargethan, dass dies die allgemeinste Transformation des Linienelementes in sich ist.[1])

Aus dem Angeführten folgt ferner sofort:

Das Linienelement jeder Fläche konstanten Krümmungsmasses lässt dreifach unendlich viele Transformationen in sich zu; oder:

---

[1]) Soll ds^2 in bestimmter Form erscheinen, so muss die Substitutions-Determinante $mq - np$ von Null verschieden sein; wenn insbesondere, wie dies in No. 3 geschieht, die Fläche konform auf die obere (positive) Halbebene abgebildet wird, so muss die Determinante positiv sein, und zwar kann speziell $mq - np = 1$ angenommen werden. Vgl. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris 1887—96, t. III, No. 784, 785.

Jede Fläche konstanten Krümmungsmasses ist auf dreifach unendlich viele Arten auf sich selbst abwickelbar.

2. Konforme Abbildung auf die Kugel; stereographische Polarprojektion.

Im Allgemeinen untersucht man die Geometrie einer Fläche recht zweckmässig mit Hilfe ihrer konformen Abbildung auf die Ebene, wie das z. B. bei der sphärischen Geometrie durch die stereographische Polarprojektion geschehen kann.

Die stereographische Projektion einer durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

gegebenen Kugel vom z-Pol auf die xy-Ebene ist identisch mit ihrer konformen Abbildung auf die Ebene einer komplexen Variablen

$$w = \xi + \eta i$$

Diese Abbildung wird vermittelt durch die Gleichungen[1])

$$(3) \quad x = \frac{w + w_1}{ww_1 + 1} \quad , \quad y = \frac{1}{i} \frac{w - w_1}{ww_1 + 1} \quad , \quad z = \frac{ww_1 - 1}{ww_1 + 1} \quad ,$$

wenn wieder, wie oben, w_1 die zu w konjugierte komplexe Grösse bedeutet.

Das Quadrat der Länge des Linienelements wird

$$(4) \quad ds^2 = \frac{4\, dw\, dw_1}{(ww_1 + 1)^2}$$

Durch die Substitutionen

$$\begin{array}{c|c} x & \frac{x}{R} \\ y & \frac{y}{R} \\ z & \frac{z}{R} \\ w & Rw \\ w_1 & Rw_1 \end{array}$$

[1]) Weierstrass, Über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. Monatsber. der Berl. Akad. vom Jahre 1866. S. 618.

kann man von der Kugel mit dem Radius 1 zu einer solchen mit beliebigem Radius R übergehen; in diesem Falle wird

$$ds^2 = \frac{4\,dw\,dw_1}{(ww_1 + K)^2} \tag{5}$$

wo $K = \frac{1}{R^2}$ ist.

Diese Abbildung gilt zunächst, da jede sphärische Fläche auf eine Kugel mit der gleichen Krümmung abwickelbar ist, für alle Flächen konstanten positiven Krümmungsmasses; da aber die Gaussische Beziehung (2)

$$K = -\frac{(ww_1 + K)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 log\left(\frac{2}{ww_1 + K}\right)^2}{\partial w\,\partial w_1}$$

eine identische ist, also auch für negative Werte von K richtig bleibt, so gilt die erwähnte Abbildung auch für alle pseudosphärischen Flächen.

Jeder geodätischen Linie der abgebildeten Fläche konstanten Krümmungsmasses entspricht ein grösster Kreis der Kugel, d. h. der Schnittkreis einer Ebene

$$ax + by + cz = 0$$

mit der Kugel, also vermöge der Gleichungen (3) ein Kreis

$$a(w + w_1) - bi(w - w_1) + c(ww_1 - 1) = 0$$

in der w-Ebene. Dieser Kreis schneidet für den Fall $K > 0$ den um den Nullpunkt als Mittelpunkt konstruierten Kreis

$$ww_1 - 1 = 0$$

in den beiden Endpunkten eines Durchmessers, für den Fall $K < 0$ den um den Nullpunkt als Mittelpunkt konstruierten Kreis

$$ww_1 + 1 = 0$$

unter rechtem Winkel.[1])

3. Konforme Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf eine reelle Ebene.

Für die pseudosphärischen Flächen ist die Abbildung auf die Ebene der komplexen Veränderlichen w identisch mit der konformen Abbildung auf eine reelle Ebene der-

[1]) Vgl. hierüber: H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Berlin 1890. Bd. II, S. 363.

gestalt, dass den geodätischen Linien der Fläche Kreisbogen in der Ebene entsprechen.[1])

Beweis: Durch Einführung geodätischer Parallelkoordinaten (u, v), von denen die Linie $u = o$ die konstante geodätische Krümmung $\frac{1}{k}$ hat, lässt sich das Quadrat der Länge des Linienelementes einer Fläche mit dem konstanten Krümmungsmass $\left(-\frac{1}{k^2}\right)$ in die Form

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{k}} dv^2 \tag{6}$$

setzen.[2]) Die Gleichungen

$$x = v \quad , \quad y = k\, e^{-\frac{u}{k}} \tag{7}$$

liefern eine konforme Abbildung der pseudosphärischen Fläche auf eine Halbebene, und zwar entspricht jedem reellen, im Endlichen gelegenen Punkte der Fläche eindeutig ein Punkt derjenigen Halbebene, welche nach der Seite der positiven Ordinaten hin gelegen ist, und welche der Kürze halber als positive Halbebene bezeichnet werden soll.[3]) Die im Unendlichen gelegenen Punkte der Fläche bilden sich auf der Abscissenachse ab, welche deshalb in diesem Falle auch als Grenzgerade bezeichnet wird.

Da nach No. 1 die pseudosphärischen Flächen zu den Liouvilleschen gehören, so lassen sich die geodätischen Linien durch Quadraturen bestimmen.[4])

---

[1]) Beltrami, Saggio di interpetrazione della Geometria non-euclidea. Battagl. Giorn. t. VI. pag. 284—312. (Übersetzt in Annales de l'Ecole normale, t. VI. pag. 251—288.)

[2]) Um eine schleppende Darstellung zu vermeiden, sind die Formen, in denen das Quadrat der Länge des Linienelementes bei den Flächen konstanten Krümmungsmasses erscheinen kann, als bekannt vorausgesetzt. Vgl. z. B. Darboux, a. a. O. No. 66 ff.

[3]) Es ist zu beachten, dass nicht auch umgekehrt jedem Punkte der Halbebene eindeutig ein Punkt der Fläche zugehört. Dies trifft nur dann zu, wenn man sich die Fläche nach Art der Riemannschen Flächen aus unendlich vielen über einander lagernden Blättern zusammengesetzt denkt.

[4]) Vgl. Liouville, note III à Monge, Appl. p. 577.

Bekanntlich lautet für die Liouvillesche Form

$$ds^2 = [\varphi(u) + \psi(v)]\,(du^2 + dv^2)$$

die Gleichung der geodätischen Linien

$$\pm \frac{du}{\sqrt{\varphi(u) + C}} = \frac{dv}{\sqrt{\psi(v) - C}} \quad ,$$

wo C eine gewisse Konstante bedeutet. Bezieht man nun das Quadrat der Länge des Linienelementes

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{k}} dv^2$$

auf die isometrischen Parameter

$$u^* = \int^{\bullet} e^{-\frac{u}{k}} du \quad , \quad v^* = v \quad ,$$

so erhält man

$$ds^2 = e^{\frac{2u}{k}} (du^{*2} + dv^{*2}) \quad ,$$

$$\varphi(u^*) = e^{\frac{2u}{k}} \quad , \quad \psi(v^*) = 0 \quad .$$

Da die Konstante C für reelle geodätische Linien wesentlich negativ sein muss, also $C = -m^2$ gesetzt werden kann, so erhält man als Differentialgleichung der geodätischen Linien sofort

$$\pm \frac{du}{e^{\frac{u}{k}} \sqrt{e^{\frac{2u}{k}} - m^2}} = \frac{dv}{m}$$

und daraus

$$v = \pm m \int^{\bullet} \frac{du}{e^{\frac{u}{k}} \sqrt{e^{\frac{2u}{k}} - m^2}} + n$$

oder

$$v = \pm \frac{k}{m} \sqrt{1 - m^2 \cdot e^{-\frac{2u}{k}}} + n \quad , \tag{8}$$

wo m und n willkürliche Konstanten sind. —

Als Gleichung des Bildes einer geodätischen Linie folgt aus (6), (7) und (8) unmittelbar

$$(x - n)^2 + y^2 = \frac{k^2}{m^2} \quad . \tag{9}$$

Die geodätischen Linien bilden sich also ab als Bogen von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Die geodätischen Linien $v = \text{const.}$ bilden sich ab als gerade Linien, welche der y-Achse parallel sind, also Kreise mit unendlich grossem Radius.

(Anmerkung. Durch Transformation mittelst reziproker Radien kann man die Grenzgerade in einen Grenzkreis transformieren, die Bilder der geodätischen Linien in Kreisbogen, welche sämtlich innerhalb des Grenzkreises liegen und seine Peripherie unter rechtem Winkel schneiden. Die reellen, im Endlichen gelegenen Punkte der Fläche werden dann durch die Punkte im Innern des Grenzkreises, die im Unendlichen gelegenen Punkte durch die Punkte der Peripherie des Kreises dargestellt.[1]) Vgl. No. 8, 9.)

4. Einige allgemeine Sätze über die geodätischen Linien auf pseudosphärischen Flächen.

Die angegebene konforme Abbildung der Flächen konstanten negativen Krümmungsmasses erlaubt direkt, mehrere Aussagen über die geodätischen Linien zu machen. Da z. B. durch zwei Punkte der Ebene stets ein aber auch nur ein Kreis hindurchgeht, welcher zugleich die x-Achse orthogonal durchschneidet, und da sich ferner durch jeden Punkt der Ebene eine und nur eine Kreislinie legen lässt, welche zugleich die x-Achse und einen festen Kreis unter rechtem Winkel schneidet, so hat man die Sätze:

Durch zwei reelle Punkte einer Fläche konstanten negativen Krümmungsmasses lässt sich stets eine aber auch nur eine geodätische Linie legen.[2])

Durch jeden Punkt einer Fläche konstanter negativer Krümmung lässt sich eine und nur eine geodätische Linie hindurchlegen, welche eine gegebene geodätische Linie senkrecht durchschneidet.[3])

---

[1]) Beltrami, a. a. O. S. 288.

[2]) Beltrami, a. a. O. S. 290; Darboux, Leçons, t. III. No. 786; Bianchi, No. 230.

[3]) Vgl. Darboux t. III. No. 794.

Während also bei Flächen mit positivem Krümmungsmass der Fall eintreten kann, dass durch zwei Punkte eine geodätische Linie nicht mehr eindeutig bestimmt ist (z. B. bei zwei diametral gegenüberliegenden Punkten einer Kugel oder bei den Polen einer allgemeinen Rotationsfläche), ist dies bei pseudosphärischen Flächen ausgeschlossen.

Wie der in No. 8 mit anderen Mitteln bewiesene Satz auch aus der soeben erläuterten konformen Abbildung hergeleitet werden könnte, möge die Figur 1 andeuten, in welcher die beiden punktiert gezeichneten Kreise K_1 und K_2 die von dem festen Punkte S ausgehenden geodätischen Linien bedeuten, welche die durch den Kreis K dargestellte gegebene geodätische Linie im Unendlichen schneiden.[1])

5. Der Satz des Herrn Busse.

Den in No. 3 bewiesenen Satz kann man in folgender Form umkehren:

Lässt sich eine Fläche in der Weise auf eine Ebene konform abbilden, dass den geodätischen Linien Kreisbogen (oder gerade Linien) entsprechen, so ist das Krümmungsmass der Fläche konstant.

Dieser Satz ist zuerst von Herrn Busse in seiner Dissertation[2]) aufgestellt und durch Zurückführung auf den unten (S. 15) angegebenen Beltramischen Satz bewiesen worden. Mit Hilfe von Methoden, deren Anwendbarkeit auf den vorliegenden Fall im Sommersemester 1897 im mathematischen Seminar der Berliner Universität zur Sprache kam, lässt sich der Beweis des genannten Satzes in folgender Weise führen.

Bei der konformen Abbildung auf die Ebene der komplexen Veränderlichen $w = \xi + \eta i$ sei

---

[1]) In der Litteratur findet sich meines Wissens über die Möglichkeit eines solchen Beweises keine Notiz; der ähnliche Beweis bei Darboux (t. III. No. 794) setzt die Kenntnis der Transformationen voraus.

[2]) Über eine spezielle konforme Abbildung der Flächen konstanten Krümmungsmasses auf die Ebene mit einem Anhange, enthaltend die Litteratur über die Flächen konstanten Krümmungsmasses. Berlin (Göttingen) 1896. S. 9 ff.

(10) $$ds^2 = \frac{dw\ dw_1}{f(w, w_1)}$$

das Quadrat der Länge des Linienelementes der betrachteten Fläche, so geht die allgemeine Differentialgleichung der geodätischen Linien [1]) über in

(11) $$\frac{w_1''}{w_1'} = \frac{\partial \log f}{\partial w_1} \cdot w_1' - \frac{\partial \log f}{\partial w}$$.

Ein Kreis der w-Ebene

(12) $$w_1 = \frac{C_1 w + C_2}{C_3 w + C_4}$$

hängt von drei willkürlichen Konstanten ab; deren Elimination [2]) liefert eine Differentialgleichung dritter Ordnung

(13) $$\left\{ w_1, w \right\} = 0$$ [3]) ,

welche der Voraussetzung gemäss mit der Gleichung (11) dasselbe Partikularintegral besitzen muss. Eliminiert man aus der letzten und der durch Differentiation aus (11) erhaltenen Gleichung die Grösse w_1''', so erhält man eine Gleichung, aus welcher man in Verbindung mit (11) die Grösse w_1'' eliminieren kann; als Resultat dieser Elimination erhält man

$$w_1'^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log f}{\partial w_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 \log f}{\partial w_1^2} \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log f}{\partial w} \right)^2 + \frac{\partial^2 \log f}{\partial w^2} \right] = 0 \quad .$$

Wenn diese Gleichung bei unbeschränkter Veränderlichkeit von w und w_1 identisch bestehen soll, so müssen die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke einzeln verschwinden, d. h. es muss

$$\left(\frac{\partial \log \sqrt{f}}{\partial w} \right)^2 + \frac{\partial^2 \log \sqrt{f}}{\partial w^2} = 0 \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial \log \sqrt{f}}{\partial w_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 \log \sqrt{f}}{\partial w_1^2} = 0$$

sein.

[1]) Vgl. z. B. Knoblauch, Einl. § 53, (10). Darboux II. No. 501 ff.

[2]) H. A. Schwarz a. a. O. S. 78.

[3]) Hierbei ist $\left\{ w_1, w \right\}$ die von Cayley eingeführte Abkürzung für die „Schwarzsche Derivierte“

$$\frac{w_1'''}{w_1'} - \frac{3}{2} \left(\frac{w_1''}{w_1'} \right)^2 .$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergiebt sich $\sqrt{f}$ als ganze Funktion ersten Grades von w, deren Koeffizienten Funktionen von w_1 sind, aus der zweiten als ganze Funktion ersten Grades von w_1, deren Koeffizienten Funktionen von w sind; $\sqrt{f}$ muss also die Form

$$Aww_1 + Bw + B_1 w_1 + C$$

haben, wobei A, B, B_1, C gewisse Konstanten bedeuten. Damit $\sqrt{f}$ einen reellen Wert annehme, müssen

$$\begin{aligned} &A \text{ und } C \text{ reell} \quad , \\ &B \text{ und } B_1 \text{ konjugiert komplex} \end{aligned}$$

sein. Setzt man den soeben gefundenen Wert von $\sqrt{f}$ in (10) ein, so erhält man für das Quadrat der Länge des Linienelementes

$$(14) \qquad ds^2 = \frac{dw\ dw_1}{(Aww_1 + Bw + B_1 w_1 + C)^2} .$$

Da sich dieser Ausdruck durch geeignete Wahl der Konstanten in die in No. 1 angegebene Form

$$ds^2 = \frac{4}{K} \frac{d\alpha\ d\alpha_1}{(\alpha - \alpha_1)^2}$$

überführen lässt, so hat die betrachtete Fläche konstantes Krümmungsmass.[1])

6. Geodätische Abbildung der Flächen konstanten Krümmungsmasses auf die Ebene.

Da bei der Zentralprojektion der Kugel auf eine Ebene die Bilder der Hauptkreise gerade Linien werden, so ist es nach No. 2 möglich, eine jede Fläche konstanten Krümmungsmasses wenn auch nicht konform, so doch punktweise eindeutig so auf eine Ebene abzubilden, dass ihren geodätischen Linien gerade Linien entsprechen.

Man pflegt eine Abbildung zweier Flächen auf einander, bei welcher in Bild und Original die geodätischen Linien sich entsprechen, eine geodätische Abbildung zu nennen und

[1]) Beiläufig erkennt man auch zugleich, dass die Gleichung (14) das Quadrat der Länge des Linienelements einer Fläche konstanter Krümmung in allgemeinster Form liefert.

kann bei Anwendung dieser Bezeichnungsweise den angeführten Satz auch so aussprechen:

Die Flächen konstanten Krümmungsmasses lassen eine geodätische Abbildung auf die Ebene zu.

Viel wichtiger als dieser Satz selbst ist seine Umkehrung:

Die punktweise eindeutige Abbildung einer Fläche auf eine Ebene derart, dass den geodätischen Linien Gerade entsprechen, ist nur möglich, wenn die Fläche konstante Krümmung besitzt.[1])

Beweis: Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Fläche können als Funktionen derjenigen Parameter u, v betrachtet werden, welche bei der Abbildung den rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y eines Punktes der Bildebene entsprechen; sollen nun den geodätischen Linien der Fläche die Geraden der Ebene entsprechen, d. h. soll die Differentialgleichung der geodätischen Linien der Fläche als Integral eine lineare Gleichung zwischen u und v besitzen, so muss sie sich reduzieren lassen auf die Form

$$du\, d^2v - dv\, d^2u = 0 \quad .$$

Die Bedingungen für diese Reduktion ergeben sich aus der allgemeinen Differentialgleichung der geodätischen Linien[2])

$$(E\,du + F\,dv)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2 + \frac{\partial G}{\partial u}\,du\,dv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\,dv^2\right]$$

$$-(F\,du + G\,dv)\left[\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\,du^2 + \frac{\partial E}{\partial v}\,du\,dv + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2\right]$$

$$+(EG - F^2)\,(du\,d^2v - dv\,d^2u) = 0$$

durch Nullsetzung der Koeffizienten von du^3, du^2dv, $dudv^2$, dv^3; dies liefert die vier Gleichungen:

---

[1]) Beltrami, Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. Ann. di Mat. t. VII. pag. 203.

[2]) Knoblauch, Einl. § 53, (9); Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas. Göttingen 1828. Art. 18.

$$E\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} = 0 \quad .$$

$$E\frac{\partial E}{\partial u} + F\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) - F\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} = 0 \quad ,$$

$$G\frac{\partial E}{\partial v} + F\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) - F\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} = 0 \quad ,$$

$$G\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} = 0 \quad .$$

Die Integration dieser simultanen Differentialgleichungen, die zuerst von Beltrami[1]) geleistet worden ist, führt zu dem Schlusse, dass die Fundamentalgrössen erster Ordnung sich auf folgende Formen bringen lassen:

$$E = \frac{R^2(v^2 + a^2)}{(u^2+v^2+a^2)^2} \quad ,$$

$$F = \frac{-R^2uv}{(u^2+v^2+a^2)^2} \quad .$$

$$G = \frac{R^2(u^2 + a^2)}{(u^2+v^2+a^2)^2} \quad ,$$

wo R und a willkürliche Konstanten bedeuten. — Setzt man diese Werte in den Ausdruck für das Krümmungsmass[2]) ein, so folgt

$$K = \frac{1}{R^2} \quad ,$$

was gezeigt werden sollte.[3])

Mittelst der Methoden des Herrn Knoblauch lässt sich der angegebene Satz auch folgendermassen beweisen.

Die Cartesischen Koordinaten eines Punktes der Bildebene seien (u, v), das Quadrat der Länge des Linienelementes der Fläche sei gegeben durch

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \quad .$$

---

[1]) a. a. O. S. 185—204.

[2]) Gauss, Disqu. Art. 11.

[3]) Man vergl. den verhältnismässig einfachen Beweis bei Darboux, t. III. No. 598.

Der Voraussetzung gemäss soll die Differentialgleichung der geodätischen Linien das Integral

$$Au + Bv + C = 0$$

besitzen, wobei A, B, C willkürliche Konstanten bedeuten. Die Differentialgleichung muss also lauten

$$\frac{d^2v}{du^2} = 0 \quad .$$

Da aber die allgemeine Differentialgleichung der geodätischen Linien sich in die Form

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^3 J_1'' - \left(\frac{dv}{du}\right)^2 (J_2'' - 2J_1') + \frac{dv}{du}(J_1 - 2J_2') - J_2 = \frac{d^2v}{du^2}$$

setzen lässt, so ergeben sich als Bedingungen dafür, dass $\frac{d^2v}{du^2} = 0$ ist, die Gleichungen

$$J_2 = J_1'' = 0 \quad ,$$
$$J_1 = 2J_2' \quad ,$$
$$J_2'' = 2J_1' \quad .$$

Bei Berücksichtigung dieser Werte erhält man aus den Gleichungen [1])

$$EK = J_1 J_2' - J_1' J_2 + J_2 J_2'' - J_2'^2 + \frac{\partial J_2}{\partial v} - \frac{\partial J_2'}{\partial u} \quad ,$$

$$GK = J_1' J_2'' - J_1'' J_2' + J_1 J_1'' - J_1'^2 + \frac{\partial J_1''}{\partial u} - \frac{\partial J_1'}{\partial v}$$

die folgenden:

$$\text{(15a)} \qquad \begin{cases} EK = J_2'^2 - \dfrac{\partial J_2'}{\partial u} \\ GK = J_1'^2 - \dfrac{\partial J_1'}{\partial v} \end{cases} \quad .$$

Aus

$$FK = J_1' J_2' - J_1'' J_2 - \frac{\partial J_2''}{\partial u} + \frac{\partial J_2'}{\partial v}$$

folgen, da in diesem Falle

$$\frac{\partial J_2'}{\partial v} = \frac{\partial J_1'}{\partial u}$$

ist, die beiden Gleichungen

[1]) Alle hierbei zur Anwendung kommenden Gleichungen findet man in Knoblauch, Einl. § 28.

$$(15b) \qquad \begin{cases} FK = J_1' J_2' - \dfrac{\partial J_1'}{\partial u} \\ FK = J_1' J_2' - \dfrac{\partial J_2'}{\partial v} \end{cases} ,$$

Differenziert man die linke und rechte Seite der ersten Gleichung des Paares (15a) nach v und die beiden Seiten der letzten Gleichung des Paares (15b) nach u, so erhält man durch Subtraktion

$$(16) \qquad E \frac{\partial K}{\partial v} - F \frac{\partial K}{\partial u} = 0 ,$$

wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2 (E J_1' + F J_2')$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial u} = E J_1' + 3 F J_2' ,$$

mithin

$$\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} = E J_1' - F J_2'$$

ist. — In analoger Weise erhält man aus der zweiten Gleichung des Paares (15a) und der ersten Gleichung des Paares (15b)

$$(17) \qquad F \frac{\partial K}{\partial v} - G \frac{\partial K}{\partial u} = 0 .$$

Aus dem System der Gleichungen (16) und (17) folgt, da die Determinante $EG - F^2$ von Null verschieden ist, dass

$$\frac{\partial K}{\partial u} = 0 , \quad \frac{\partial K}{\partial v} = 0 ,$$

mithin K eine Konstante ist.[1])

Mit Benutzung der auf S. 14 eingeführten Ausdrucksweise kann der hierdurch bewiesene Satz so ausgesprochen werden:

[1]) Man vergleiche den Beweis bei Bianchi No. 242, wo zur Herleitung desselben Resultates auf demselben Wege die Kenntnis der allgemeinen Theorie der binären quadratischen Differentialformen vorausgesetzt wird. Dieses ist bei der von Herrn Knoblauch eingeführten Definition der Grössen J_1, J_2, J_1', J_2', J_1'', J_2'' nicht erforderlich. Die genannten Grössen erscheinen erst später als spezielle Werte der allgemeinen Christoffelschen Differentialausdrücke.

Die Flächen konstanten Krümmungsmasses sind die einzigen, welche auf die Ebene geodätisch abgebildet werden können.

7. Zusammenstellung der Abbildungsgleichungen für die Fälle $K = 0$, $K > 0$, $K < 0$. Geodätisch-konforme Abbildung der „abwickelbaren" Flächen auf die Ebene.

Unter Zugrundelegung eines Systems geodätischer Polarkoordinaten (u, v), von denen die Kurven $v = const.$ durch einen und denselben Punkt der Fläche hindurchgehen, nehmen die Quadrate der Längen der Linienelemente auf den Flächen konstanten Krümmungsmasses einfache Formen an; je nachdem das Krümmungsmass der Fläche gleich Null, positiv oder negativ ist, erhält man beziehlich die Werte

$$ds^2 = du^2 + u^2\,dv^2 \quad ,$$

$$ds^2 = du^2 + k^2\left(sin\,\frac{u}{k}\right)^2 dv^2 \quad ,$$

$$ds^2 = du^2 + k^2\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{u}{k}\right)^2 dv^2 \quad .$$

Diesen drei Formen entsprechend erhält man als Gleichungen der geodätischen Linien sehr leicht in der schon oben angegebenen Weise

$$Au\,cos\,v + Bu\,sin\,v + C = 0 \quad , \quad K = 0 \quad ,$$

$$A\,tg\,\frac{u}{k}\,cos\,v + B\,tg\,\frac{u}{k}\,sin\,v + C = 0 \quad , \quad K > 0 \quad ,$$

$$A\,\mathfrak{Tg}\,\frac{u}{k}\,cos\,v + B\,\mathfrak{Tg}\,\frac{u}{k}\,sin\,v + C = 0 \quad , \quad K < 0 \quad ,$$

wobei A, B, C willkürliche Konstanten sind. — Wählt man nun die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten (x, y) eines Punktes der Bildebene

für $K = 0$: $\quad x = u\,cos\,v \quad , \quad y = u\,sin\,v \quad ,$

für $K > 0$: $\quad x = tg\,\frac{u}{k}\,cos\,v \quad , \quad y = tg\,\frac{u}{k}\,sin\,v \quad ,$

für $K < 0$: $\quad x = \mathfrak{Tg}\,\frac{u}{k}\,cos\,v \quad , \quad y = \mathfrak{Tg}\,\frac{u}{k}\,sin\,v \quad ,$

so dass, wie verlangt worden, die geodätischen Linien der

Fläche den Geraden der Ebene entsprechen, so erhält man für ds^2 beziehlich die Formen

$$(18) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad ,$$

$$(19) \qquad ds^2 = k^2 \frac{(1+y^2)\,dx^2 - 2\,x\,y\,dx\,dy + (1+x^2)\,dy^2}{(x^2+y^2+1)^2} \quad ,$$

$$(20) \qquad ds^2 = k^2 \frac{(1-y^2)\,dx^2 + 2\,x\,y\,dx\,dy + (1-x^2)\,dy^2}{(x^2+y^2-1)^2} \quad .$$ [1])

Aus (18) erkennt man, dass die (auf die Ebene) „abwickelbaren" Flächen zugleich konform auf die xy-Ebene abgebildet werden.

Es gilt aber auch die Umkehrung dieses Satzes:

Die „abwickelbaren" Flächen sind die einzigen, welche sich geodätisch-konform auf die Ebene abbilden lassen.

Zum Beweise legt man für die konforme Abbildung ein isometrisches Koordinatensystem zu Grunde, für welches bekanntlich [2])

$$J_1 = J_2' = -J_1''$$
$$J_2'' = J_1' = -J_2$$

ist. Da aber das Bild der geodätischen Linie eine Gerade sein soll, so verschwinden nach S. 17 die Grössen J_2 und J_1'', also auch J_1, J_1', J_2', J_2'', mithin hat die betrachtete Fläche das Krümmungsmass Null.

8. Diskussion der geodätischen Abbildung pseudosphärischer Flächen nach Beltrami.

Ersetzt man in den auf S. 16 angegebenen Werten der Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G die dort einstweilen willkürlich gebliebenen Konstanten a und R beziehlich durch ai und ki, so erhält man für das Quadrat der Länge des Linienelementes der Fläche mit dem konstanten Krümmungsmass $\left(-\frac{1}{k^2}\right)$ den Wert

$$(21) \qquad ds^2 = k^2 \frac{(a^2+v^2)\,du^2 + 2uv\,du\,dv + (a^2+u^2)\,dv^2}{(a^2+u^2+v^2)^2} \quad .$$

[1]) Beltrami a. a. O. Darboux, III. No. 599.

[2]) Knoblauch, § 52, (5).

Diese Form hat den bereits erwähnten Vorzug, dass bei Zugrundelegung derselben jede lineare Gleichung zwischen u und v eine geodätische Linie darstellt, und dass auch umgekehrt jede geodätische Linie durch eine lineare Gleichung zwischen diesen Variablen dargestellt wird. Insbesondere werden auch die Parameterkurven

$$u = const \quad , \quad v = const$$

von geodätischen Linien gebildet; die Kurven

$$u = 0 \quad , \quad v = 0$$

durchschneiden einander rechtwinklig. — Die Gleichungen

$$x = u \quad , \quad y = v$$

liefern eine punktweise eindeutige [1]) Abbildung der Fläche auf die xy-Ebene derart, dass den geodätischen Linien der Fläche Gerade der Ebene entsprechen. Eine vom Punkte $(u=0,\ v=0)$ ausgehende geodätische Linie kann durch die Gleichungen

$$u = r \cos \vartheta \quad , \quad v = r \sin \vartheta \tag{22}$$

dargestellt werden, in welchen (r, ϑ) die Polarkoordinaten des dem Punkte (u, v) in der Bildebene entsprechenden Punktes bedeuten.

Hat ϑ einen konstanten Wert ϑ_1, so erhält man für die von dem Punkte $(0, 0)$ aus gerechneten Bogenlänge s der zu dem Werte ϑ_1 gehörigen geodätischen Linie aus (21) die Gleichung

$$ds = k \frac{adr}{a^2 - r^2} \quad ,$$

d. h.

$$s = \frac{k}{2} log \frac{a + r}{a - r}$$

oder

$$s = \frac{k}{2} log \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}} \tag{23}$$

Wenn der Bogen s als positive Grösse erscheinen soll, so ist der Quadratwurzel das positive Zeichen beizulegen. Aus (23) folgt, dass

---

[1]) Man vergl. die Fussnote [3]) auf S. 9.

$s = 0$ ist, wenn $r = 0$,
s reell und positiv, wenn $0 < r < a$,
s unendlich gross , wenn $r = a$,
s imaginär , wenn $r > a$ ist.

Es entsprechen also den reellen, im Endlichen gelegenen Punkten der Fläche die im Innern des „Grenzkreises“

$$x^2 + y^2 = a^2$$

gelegenen Punkte der Bildebene. Die im Unendlichen gelegenen Punkte der Fläche bilden sich auf der Peripherie des genannten Kreises ab, die geodätischen Linien als Sehnen, die geodätischen Kreise mit dem Mittelpunkte ($u = 0$, $v = 0$) als konzentrische Kreise mit dem Anfangspunkt ($x = 0$, $y = 0$) als Mittelpunkt.

Betrachtet man in den Gleichungen (22) r als konstant, ϑ als veränderlich, so erhält man die Gleichungen eines geodätischen Kreises mit dem Mittelpunkt (0, 0). Aus der Gleichung (21) erhält man für die Bogenlänge σ dieses geodätischen Kreises, welche in der Bildebene durch einen Kreisbogen mit dem Radius r und dem Centriwinkel ϑ dargestellt wird, den Wert

$$\sigma = \frac{k r \vartheta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad . \tag{24}$$

Da also σ für jeden Wert von r der Grösse ϑ proportional ist, so erhellt daraus, dass zwei geodätische Linien, welche von dem Punkte ($u = 0$, $v = 0$) ausgehen, mit einander denselben Winkel einschliessen wie ihre ebenen Bilder, die vom Anfangspunkte ($x = 0$, $y = 0$) ausgehenden Radien, d. h. dass die Abbildung der Fläche auf die Ebene in der Umgebung des Nullpunktes konform ist.

Aus (23) folgt

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} = a \operatorname{Tg} \frac{s}{k} \tag{23*}$$

und ferner

$$\operatorname{Cof} \frac{s}{k} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} \quad ,$$

wobei der Quadratwurzel das positive Zeichen beizulegen

ist. Aus den Gleichungen (23*) und (24) erhält man für die Bogenlänge σ den Wert

$$\sigma = \vartheta\, k\, \mathfrak{Sin}\frac{s}{k} \qquad (24^*)$$

so dass der halbe Umfang des geodätischen Kreises mit dem Radius s gegeben wird durch die Grösse

$$\pi\, k\, \mathfrak{Sin}\frac{s}{k} \text{ oder } \tfrac{1}{2}\pi k\left(e^{\frac{s}{k}} - e^{-\frac{s}{k}}\right)^{1)}$$

Die in No. 4 (S. 11) angeführten Sätze folgen bei der vorliegenden Art der Abbildung sehr leicht aus bekannten Eigenschaften der geraden Linie.

Da die Abbildung mit alleiniger Ausnahme der Umgebung des Nullpunktes nicht konform ist, so ist die Frage berechtigt, welche Beziehung zwischen dem Winkel zweier geodätischer Linien und dem Winkel ihrer Bildsehnen besteht. Wenn (u, v) die Koordinaten eines festen Punktes der Fläche, $(\overline{u}, \overline{v})$ diejenigen eines beliebigen Punktes auf einer der unendlich vielen durch (u, v) hindurchgehenden geodätischen Linien sind, so können die Gleichungen zweier solcher geodätischen Linien in die Form

$$\overline{v} - v = m\,(\overline{u} - u) \quad , \quad \overline{v} - v = n\,(\overline{u} - u)$$

gebracht werden, wobei

$$m = tg\,\mu \quad , \quad n = tg\,\nu$$

die Richtungskoeffizienten der zugehörigen Bildsehnen sind. Der Winkel α, den die beiden geodätischen Linien auf der Fläche einschliessen, wird nach einer bekannten Formel[2]) gegeben durch

$$tg\,\alpha = \frac{(n-m)\sqrt{EG - F^2}}{E + (n+m)F + mnG} \quad ;$$

berücksichtigt man die Werte der Fundamentalgrössen, und bezeichnet man den Winkel $(\nu - \mu)$, welchen die beiden Bildsehnen mit einander einschliessen, durch α', so wird

---

[1]) Genau denselben Wert hat Gauss für den Halbperimeter des Nicht-Euklidischen Kreises berechnet. (Brief an Schumacher vom 12. Juli 1831; Briefwechsel herausgeg. v. C. A. Peters, 2. Bd. 1860. S. 271).

[2]) z. B. Knoblauch § 4, (9).

$$(25)\quad tg\,\alpha = \frac{a\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}\,\sin\alpha'}{a^2\cos\alpha' - (v\cos\varphi - u\sin\varphi)(v\cos\nu - u\sin\nu)}.$$

Da der Nenner dieses Bruches für jeden reellen Punkt der Fläche endlich bleibt, da ferner $\sin\alpha'$ von Null verschieden ist, weil die beiden Sehnen sich im Innern des Grenzkreises schneiden und nicht zusammenfallen, so kann α nur verschwinden, wenn

$$u^2 + v^2 = a^2$$

ist, d. h. nur wenn der Schnittpunkt der beiden geodätischen Linien ins Unendliche fällt.

Ist PQ (Figur 2) irgend eine Sehne des Grenzkreises, so entspricht dieser auf der Fläche eine gewisse geodätische Linie pq, welche nach beiden Seiten ins Unendliche geht. Ist S ein ausserhalb der Sehne PQ aber nicht auf der Peripherie gelegener Punkt der Kreisfläche, so kann eine von S ausgehende Gerade in Bezug auf die Sehne PQ und die Strecken SP und SQ drei wesentlich verschiedene Lagen haben:

a) sie fällt in das Innere des Winkelraumes PSQ, schneidet also PQ in einem zwischen P und Q gelegenen Punkte;
b) sie fällt mit einem der Schenkel des Winkels PSQ zusammen, schneidet also PQ in P oder Q;
c) sie liegt ausserhalb des Winkelraumes PSQ, schneidet also PQ gar nicht (oder doch nur in der Verlängerung, was aber nicht in Betracht kommt, da nur die im Innern des Kreises gelegenen Punkte zu reellen Punkten der Fläche gehören). —

Entsprechend diesen drei Fällen kann auf der Fläche eine durch den dem Punkte S zugeordneten Punkt s gehende geodätische Linie drei wesentlich verschiedene Lagen haben:

a) sie schneidet die feste, der Sehne PQ entsprechende geodätische Linie pq in einem reellen, im Endlichen gelegenen Punkte;
b) sie schneidet sie im Unendlichen;
c) sie schneidet sie überhaupt nicht.

So wie die Geraden SP und SQ den Übergang bilden zwischen denjenigen Geraden, welche die Strecke PQ in einem im Innern gelegenen Punkte schneiden, und denen,

welche sie nicht schneiden, so bilden auch die geodätischen Linien sp und sq den Übergang von denjenigen geodätischen Linien, welche pq in einem im Endlichen gelegenen Punkte schneiden, zu denjenigen, welche sie nicht schneiden; um dies auch in der Benennung zum Ausdruck zu bringen, bezeichnet man eine durch die Eigenschaft b charakterisierte geodätische Linie als eine zu pq parallele geodätische Linie.

Da nun die beiden Geraden SP und SQ der Voraussetzung nach mit ihren Richtungen nicht zusammenfallen, der Winkel $PSQ = \alpha'$ also von 0^0 und 180^0 verschieden ist und S im Innern des Grenzkreises (nicht auf der Peripherie) liegt, so ist nach (25) auch der Winkel, den die beiden geodätischen Linien sp und sq mit einander einschliessen, von 0^0 und 180^0 verschieden. Man hat also das Ergebnis:

Auf den pseudosphärischen Flächen kann man zu einer jeden gegebenen, reellen geodätischen Linie durch einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt stets zwei parallele geodätische Linien legen, welche einen von 0^0 und 180^0 verschiedenen Winkel mit einander einschliessen.

Dieser Satz stimmt — abgesehen von dem Unterschiede in der Art der benutzten Grössen — mit demjenigen überein, welcher die Grundlage der Nicht-Euklidischen Geometrie bildet.

9. Der Parallelwinkel.

Nach der Gleichung (23*) wird bei der vorigen Art der Abbildung ein um den Punkt ($u = 0$, $v = 0$) als Mittelpunkt mit dem „Radius" ρ konstruierter geodätischer Kreis durch die Gleichung

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} = a \operatorname{Tg} \frac{\rho}{k}$$

dargestellt, wo r den Radius des Bildkreises bedeutet. Wählt man nun das System der krummlinigen Koordinaten so, dass der Punkt ($u = 0$, $v = 0$) mit dem im vorigen Abschnitt genannten Punkt s und die Kurve $v = 0$ mit derjenigen geodätischen Linie ss' identisch ist, welche auf pq senkrecht steht, so wird diese durch die Gleichung

(26) $$u = a\,\mathfrak{Tg}\frac{\delta}{k}$$

dargestellt, wobei mit δ die Masszahl der geodätischen Entfernung ss' des Punktes s von der geodätischen Linie pq bezeichnet ist. Da bei der speziellen Wahl des Koordinatensystems der geodätischen Linie pq (Figur 3) die der y-Achse parallele Sehne PQ entspricht, welche von der x-Achse in S' halbiert wird, und da die Abbildung in der Umgebung des Nullpunktes konform ist, so folgt aus der Gleichheit der Winkel $S'SP$ und $S'SQ$ unmittelbar, dass auch

$$\measuredangle\ s'sp = s'sq$$

ist, d. h., dass die geodätische Normale ss' den Winkel psq halbiert.[1]) Die beiden einander gleichen Winkel nennt man Winkel des Parallelismus nach Beltrami oder Parallelwinkel nach Lobatschewsky. Da die Endpunkte von PQ die Ordinaten $\pm \frac{a}{\mathfrak{Cof}\frac{\delta}{k}}$ besitzen, die zu ihnen gehörigen Radien des Grenzkreises also durch die Gleichung

$$y = \pm \frac{x}{\mathfrak{Sin}\frac{\delta}{k}}$$

gegeben sind, so erhält man für die Masszahl Δ des Parallelwinkels sogleich

(27) $$tg\,\Delta\,\mathfrak{Sin}\frac{\delta}{k} = 1 \quad .$$

Der Parallelwinkel Δ hängt also nur von der geodätischen Entfernung δ ab; er wächst, wenn δ abnimmt und nähert sich dem Werte $\frac{\pi}{2}$, wenn δ sich der Null nähert, d. h. wenn der Punkt s sich der geodätischen Linie pq nähert.

Schreibt man die Gleichung (27) in der Form

$$e^{-\frac{2\delta}{k}} + 2\,e^{-\frac{\delta}{k}}\,cotg\,\Delta = 1 \quad ,$$

so erhält man

[1]) Beltrami (Batt. Giorn. VI. pag. 294) beweist dasselbe indirekt durch Umklappen des von der ursprünglichen geodätischen Linie, der durch s gelegten Parallelen und der geodätischen Normale ss' begrenzten Flächenstreifens.

$$e^{-\frac{\delta}{k}} = \frac{-\cos\triangle \pm 1}{\sin\triangle} \quad .$$

Da wegen der Realität von δ nur das obere Vorzeichen gelten kann, so ergiebt sich schliesslich die Gleichung

$$(28) \qquad tg\,\tfrac{1}{2}\triangle = e^{-\frac{\delta}{k}} \quad ,$$

welche genau mit der Lobatschewskyschen Fundamentalgleichung der absoluten Geometrie übereinstimmt.[1])

Anmerkung. Auf einem anderen Wege gelangt man zu demselben Resultat, wenn man — nach Bianchi[2]) — von der in No. 3 angedeuteten konformen Abbildung Gebrauch macht. Führt man in Bezug auf die positive Halbebene, auf welche, wie S. 9 f. gezeigt worden, die pseudosphärische Fläche konform abgebildet werden kann, eine Transformation mittelst reziproker Radien aus, indem man als Transformationsmittelpunkt einen Punkt der negativen Halbebene wählt, so wird die Grenzgerade in einen Grenzkreis transformiert, die Bilder der geodätischen Linien in Bogen von Kreisen, welche innerhalb des Grenzkreises liegen und ihn orthogonal schneiden.

Man kann die Konstanten so wählen bezw. die Grössenverhältnisse der Figuren so abändern, dass der Radius des Grenzkreises gleich der Einheit wird. Überdies kann man durch passende Wahl des Transformationsmittelpunktes stets bewirken, dass ein beliebiger fester Punkt m der Fläche durch den Mittelpunkt M des Grenzkreises abgebildet wird.

10. Das geodätische Dreieck und die pseudosphärische Trigonometrie.

Ein beliebiges, von geodätischen Linien gebildetes Dreieck *mab* (Fig. 4) einer Fläche konstanten negativen Krümmungsmasses kann nach der Schlussbemerkung des vorigen Abschnitts so auf die Ebene konform abgebildet werden, dass der Ecke *m* der Mittelpunkt *M* des Grenzkreises mit dem Radius 1 entspricht; den Seiten *ma* und *mb* ent-

[1]) Lobatschewsky, Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. S. 53.

[2]) a. a. O. No. 237.

sprechen dann Stücke von Radien MA und MB; die Seite ab wird abgebildet durch den Bogen AB eines Kreises, welcher den Grenzkreis senkrecht durchschneidet. Bezeichnet man mit C den Mittelpunkt dieses Bildkreises, mit A' und B' die Punkte, in denen MA und MB den Kreis zum zweiten Male schneiden, so ist nach dem bekannten Sehnensatze[1])

$$MA \,.\, MA' = MB \,.\, MB' = 1 \quad .$$

ferner als Sehnentangentenwinkel

$$\sphericalangle A = AB'A' \quad , \quad \sphericalangle B = BA'B' \quad ,$$

also

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle M = 180^0 - \sphericalangle ACB \quad ,$$

wodurch gezeigt ist, dass für die pseudosphärischen Flächen der Satz gilt:

Die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks ist kleiner als zwei Rechte.

Man kann mit Hilfe derselben konformen Abbildung unter Benutzung der oben (S. 19) angegebenen Abbildungsgleichungen leicht zeigen, dass für ein geodätisches Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{a}{k}}{\sin\alpha} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{b}{k}}{\sin\beta} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{c}{k}}{\sin\gamma}$$

und

$$\cos\alpha = \sin\beta\,\sin\gamma\,\mathfrak{Cos}\,\frac{a}{k} - \cos\beta\cos\gamma$$

gelten, von denen man die erste als den Sinussatz, die zweite als den Cosinussatz der pseudosphärischen Trigonometrie bezeichnen kann. Die Gleichungen sollen hier nicht hergeleitet werden; es genügt, auf die Darstellung bei Bianchi (No. 239) hinzuweisen.[2]) — Aus den beiden Sätzen, die den

[1]) Nach der Figur bei Bianchi No. 238 könnte es scheinen, als ob C auf $A'B'$ liegt, was im allgemeinen durchaus nicht der Fall ist.

[2]) Eine direkte Ableitung der beiden Formeln aus der Differentialgleichung der geodätischen Linien findet man in: Nebelung, Trigonometrie der Flächen mit konstantem Krümmungsmasse, Dortmund, 1881. Leider ist diese Abhandlung erst während des Druckes der vorliegenden Arbeit dem Verf. zugänglich geworden.

entsprechenden Sätzen der sphärischen Trigonometrie analog sind, folgt, dass eine pseudosphärische Fläche vom Krümmungsmass $\left(-\frac{1}{k^2}\right)$ einer Kugel mit dem Radius (ki) äquivalent ist [1]), d. h. dass man die Formeln der pseudosphärischen Trigonometrie erhält, wenn man in den Formeln für die Trigonometrie einer Kugel vom Radius k die Verhältnisse der Seiten zu diesem Radius mit $i = \sqrt{-1}$ multipliziert, die Winkelgrössen aber ungeändert lässt.

Von einer Herleitung der speziellen Formeln der pseudosphärischen Trigonometrie kann hier abgesehen werden, da man ihre Giltigkeit aus den beiden Fundamentalsätzen ebenso folgern kann, wie dies in der sphärischen Trigonometrie geschieht.

Angemerkt soll nur noch werden, dass man aus der Gaussischen Gleichung

$$\triangle = k^2 (\pi - \alpha - \beta - \gamma) \qquad ,^2)$$

in welcher $\triangle$ die Masszahl des Flächeninhaltes des geodätischen Dreiecks bedeutet, einige Folgerungen ziehen kann.

Denn da bei reellen Dreiecken der Flächeninhalt eine positive Grösse ist, so folgt erstlich, dass die Winkelsumme 180^0 nicht übersteigen darf; aber noch mehr: wenn in einem einzigen endlichen Dreiecke die Winkelsumme gleich 180^0 wäre, so müsste $k = \infty$ sein, dies würde aber, da k konstant ist, auch für jedes endliche Dreieck $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ergeben; ferner folgt aus (28), dass für $k = \infty$ der Parallelwinkel $= \frac{\pi}{2}$ wird, es also zu jeder geodätischen Linie im strengen Sinne nur eine Parallele giebt; auch der umgekehrte Gedankengang ist zulässig. — Zu demselben Resultat gelangt auch die Nicht-Euklidische Geometrie. (Man vergleiche z. B. den schon zitierten Brief Gauss' an Schuhmacher a. a. O. S. 271.)

---

[1]) Minding, Crelles J. Bd. 20, S. 325; Codazzi, Nota intorno le superficie, che hanno costante il prodotte di due raggi di curvatura. Annali di Tortolini t. VIII. 1857, pag. 354ss.

[2]) Disqu. Art. 20.

Ferner ergiebt sich aus der Inhaltsformel, dass die Fläche eines geodätischen Dreiecks endlich bleibt, wenn beliebig viele seiner Ecken ins Unendliche rücken; sind alle drei Seiten des Dreiecks einander parallel, so hat dasselbe die von der Lage der drei unendlich entfernten Ecken unabhängige Grösse $k^2\pi$; eine einfache Betrachtung zeigt übrigens, dass alle solche Dreiecke kongruent sind, d. h. in ihren endlichen Teilen zur Deckung gebracht werden können.

Eine eingehendere Darstellung der Eigenschaften der geodätischen Dreiecke auf den pseudosphärischen Flächen ist hier nicht erforderlich.

11. Die Prinzipien der Nicht-Euklidischen Geometrie.

Ersetzt man die Begriffe „Ebene" und „gerade Linie" beziehlich durch die Begriffe „Fläche" und „geodätische Linie", so gelten auf den Flächen konstanten negativen Krümmungsmasses dieselben Postulate und Axiome wie in der ebenen Geometrie mit alleiniger Ausnahme des sogenannten elften Euklidischen Axioms, welches lautet: „Zwei gerade Linien, welche von einer dritten so geschnitten werden, dass die beiden inneren an derselben Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, schneiden sich hinreichend verlängert, an eben dieser Seite." Daraus ergiebt sich die Zwecklosigkeit der bis in die neueste Zeit wiederholten Versuche, dieses Axiom auf die übrigen zurückzuführen; denn wenn diese Zurückführung gelänge, so müsste das genannte Axiom auch auf den Flächen konstanten negativen Krümmungsmasses gelten, was nicht der Fall ist. Die Untersuchungen von Bolyai, Lobatschewsky, Riemann und Helmholtz haben gezeigt, dass man dieses Axiomes auch gar nicht bedarf, dass man vielmehr zu einer völlig widerspruchsfreien, in sich konsequenten Geometrie gelangt, wenn man unter Beibehaltung der übrigen Postulate das elfte Axiom aufgiebt. Unter diesen Voraussetzungen gelingt es zunächst leicht, zu zeigen, dass die Winkelsumme eines Dreiecks nicht grösser sein kann als zwei Rechte[1]), dass ferner in einer bestimmten Ebene

[1]) So schon bei Legendre, Mémoires de Paris, t. XII, 1833, pag. 369.

a) die Summe der drei Winkel
entweder
(1) in jedem Dreieck zwei Rechte
oder
(2) in jedem Dreieck weniger als zwei Rechte beträgt,
b) entweder
(1) durch jeden Punkt zu jeder Geraden eine und nur eine Parallele
oder
(2) durch jeden Punkt zu jeder Geraden stets zwei und nur zwei Parallele möglich sind.

Eine der mit einander identischen Voraussetzungen (1) dient als Grundlage der gewöhnlichen, Euklidischen Geometrie und ebenen Trigonometrie; jede der beiden anderen, ebenfalls mit einander identischen Möglichkeiten (2) ist geeignet, das Fundament für eine andere Geometrie zu bilden, die von Gauss als die Nicht-Euklidische, von Lobatschewsky als die imaginäre, von Bolyai als die absolute Raumlehre bezeichnet worden ist.

In dieser Geometrie bildet jede durch einen festen Punkt zu einer festen Geraden parallel[1]) gezogene Gerade mit dem auf die erste gefällten Lote einen gewissen, wohlbestimmten Winkel, den „Parallelwinkel", welcher von der Länge des Lotes, d. h. von der Entfernung des festen Punktes von der festen Geraden abhängt; er nimmt ab oder zu, je nachdem die Entfernung wächst oder abnimmt. Zu jeder Entfernung p gehört eindeutig ein Parallelwinkel und umgekehrt; daher wird der Parallelwinkel als eindeutige Funktion von p mit $\Pi(p)$ bezeichnet.[2]) Es gelten für ihn die Gleichungen

[1]) Die Lobatschewskysche Definition der Parallelen ist diese: Alle geraden Linien, welche in einer Ebene von einem Punkte auslaufen („Halbstrahlen"), können mit Bezug auf eine gegebene gerade Linie in derselben Ebene in zwei Klassen geteilt werden, und zwar in schneidende und nichtschneidende. Die Grenzlinie der einen und anderen Klasse jener Linien wird der gegebenen parallel genannt. (Geometrische Untersuchungen, S. 7, 8.)

[2]) Lobatschewsky, a. a. O. S. 9.

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi \quad ,$$

$$\lim_{p=0} \Pi(p) = \tfrac{\pi}{2} \quad ,$$

$$\lim_{p=\infty} \Pi(p) = 0 \quad .$$

In irgend einem rechtwinkligen Dreiecke mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ ist die folgende Relation erfüllt:

$$\left[tg\,\tfrac{1}{2}\Pi(c)\right]^2 = tg\,\tfrac{1}{2}\Pi(c-\beta)\,.\,tg\,\tfrac{1}{2}\Pi(c+\beta) \quad .$$

Da hier β eine beliebige Zahl ist, weil der der Seite c anliegende Winkel $\Pi(\beta)$ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, folglich β zwischen den Grenzen 0 und ∞ beliebig genommen werden kann, so folgert man, indem man der Reihe nach $\beta = c,\ 2c,\ 3c,\ \ldots$ setzt, dass für jede positive Zahl n

$$\left[tg\,\tfrac{1}{2}\Pi(c)\right]^n = tg\,\tfrac{1}{2}\Pi(nc) \tag{29}$$

ist. Betrachtet man n als das Verhältnis zweier Strecken x und c, und wählt man mit Rücksicht auf die Funktionalgleichung (29)

$$cotg\,\tfrac{1}{2}\Pi(c) = e^{c} \quad ,$$

so findet man für jede Linie x im allgemeinen, ihre Masszahl sei positiv oder negativ,

$$tg\,\tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x} \quad , \tag{30}$$

wobei e jede beliebige Zahl sein kann, die grösser als die Einheit ist. Da die der Messung der Linien zu Grunde gelegte Einheit beliebig ist, so kann man unter e auch die Basis der Napierschen oder natürlichen Logarithmen verstehen, oder schliesslich, wenn e diese Bedeutung hat, die Einheit so wählen, dass

$$tg\,\tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}} \tag{31}$$

wird, wo k eine Konstante ist.

Für jedes rechtwinklige Dreieck gelten ferner die Gleichungen

$$(32)\quad \begin{cases} tg\,\Pi(c) = sin\,\Pi(\alpha)\,.\,tg\,\Pi(a) & , \\ cos\,\Pi(a) = cos\,\Pi(c)\,.\,cos\,\Pi(\beta) & . \end{cases}$$

Hat man ein spitzwinkliges Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln A, B, C, so zerlegt man es durch die Höhe p in zwei rechtwinklige Dreiecke und wendet auf diese die Formeln (32) an; so erhält man die Gleichungen

$$(33)\quad \begin{cases} sin\,A\,.\,tg\,\Pi(a) = sin\,B\,.\,tg\,\Pi(b) = sin\,C\,.\,tg\,\Pi(c) & , \\ cos\,A\,cos\,\Pi(b)\,cos\,\Pi(c) + \dfrac{sin\,\Pi(b)\,sin\,\Pi(c)}{sin\,\Pi(a)} = 1 & , \\ cotg\,A\,sin\,C\,sin\,\Pi(b) + cos\,C = \dfrac{cos\,\Pi(b)}{cos\,\Pi(a)} & , \\ cos\,A + cos\,B\,cos\,C = \dfrac{sin\,B\,sin\,C}{sin\,\Pi(a)} & , \end{cases}$$

von denen man leicht nachweisen kann, dass sie auch gelten, wenn ein Winkel ein rechter oder stumpfer ist.

Die Gleichungen (31) und (33) zeigen, dass die Formeln der Nicht-Euklidischen Geometrie genau dieselben sind, wie die für pseudosphärische Flächen abgeleiteten. Bezeichnet man nämlich in No. 9 den Parallelwinkel $\triangle$, der sich auch dort als Funktion der Entfernung δ ergab, mit $\Pi(\delta)$ so stimmt die Gleichung (31) mit (28) völlig überein; ferner geht bei Anwendung dieser Bezeichnung (27) über in

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{\delta}{k} = cotg\,\Pi(\delta) \quad ,$$

$$\mathfrak{Cof}\,\frac{\delta}{k} = \frac{1}{sin\,\Pi(\delta)} \quad ;$$

führt man diese Werte in die Ausdrücke für den Sinus- und Cosinussatz der pseudosphärischen Geometrie (S. 28) ein, so ergiebt sich sofort die Identität dieser Formeln mit der ersten bezw. letzten des soeben aufgestellten Gleichungssystems (33).

Wenn in der Lobatschewskyschen Ebene die Seiten a, b, c des Dreiecks sehr klein sind, so kann man sich begnügen mit den genäherten Bestimmungen

$$\cot g\, \Pi(a) = a$$

$$\sin \Pi(a) = 1 - \tfrac{1}{2} a^2$$

$$\cos \Pi(a) = a$$

und den analogen für die Seiten b und c. Die Gleichungen (33) gehen für solche Dreiecke über in folgende:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad ,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad ,$$

$$a \sin (A + C) = b \sin A \quad ,$$

$$\cos A + \cos (B + C) = 0 \quad .$$

Von diesen Gleichungen sind die beiden ersten in der gewöhnlichen Geometrie angenommen; die beiden letzten führen mit Hilfe der ersten zu dem Schlusse

$$A + B + C = \pi \quad .$$

Demnach geht die Nicht-Euklidische Geometrie in die gewöhnliche über, wenn man voraussetzt, dass die Seiten des betrachteten geradlinigen Dreiecks sehr klein sind. — Genau dasselbe ergiebt sich für ein sehr kleines geodätisches Dreieck auf einer pseudosphärischen Fläche und auch, wie aus den Elementen bekannt ist, für ein ebensolches auf der Kugel.

Da alle Flächen konstanten positiven Krümmungsmasses auf die Kugel abwickelbar sind und bei der Biegung einer Fläche die geodätischen Linien als solche erhalten bleiben, so ist die Geometrie der geodätischen Linien auf den sphärischen Flächen mit der Geometrie der grössten Kreise auf der Kugel identisch[1]), für die Flächen konstanten negativen Krümmungsmasses dagegen ist aus allem, was bisher angeführt wurde, zu ersehen, dass die Geometrie der geodätischen Linien auf diesen Flächen

[1]) Dies gilt natürlich nur für Stücke von angemessener Begrenzung; Rückkehrkurven und andere singuläre Gebilde der Fläche schliessen jede Möglichkeit der Interpretation aus.

und die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie für denselben Wert der Konstanten k völlig identisch sind.

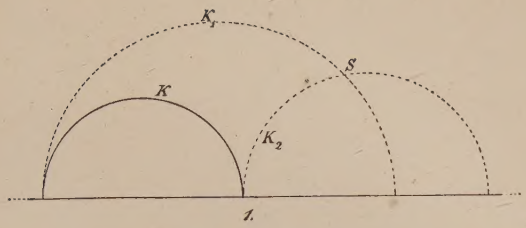
Das Fundament für die beiden letzteren bildet die Ungiltigkeit des Parallelenaxioms; von diesem sind aber auch alle Eigenschaften der Kugel und der anderen sphärischen Flächen unabhängig; wenn gleichwohl deren Geometrie[1]) mit der Nicht-Euklidischen nicht ohne weiteres übereinstimmt, so hat dies seinen innersten Grund darin, dass sowohl auf den pseudosphärischen Flächen als auch in der Lobatschewskyschen Ebene die geodätische Linie unendlich ist, dass je zwei geodätische Linien sich höchstens in einem Punkte schneiden können, während auf der Kugel und den anderen Flächen konstanten positiven Krümmungsmasses die geodätische Linie im allgemeinen geschlossen ist und je zwei geodätische Linien — von einigen speziellen Fällen abgesehen — sich in zwei Punkten schneiden.

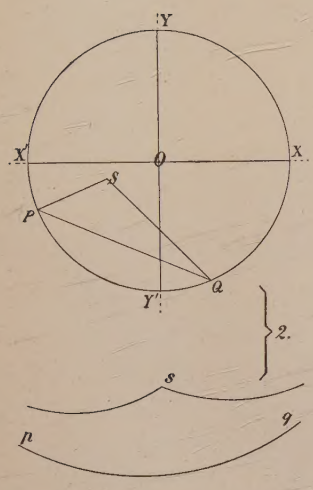
Wird ausser dem Parallelenaxiom auch noch die Forderung der Unendlichkeit der Geraden aufgegeben, so erscheinen andere Raumformen, deren Gesetze nach den bisherigen Untersuchungen ebenfalls nirgendwo einen Widerspruch aufweisen; und zwar ergeben sich aus der Annahme, dass die Gerade geschlossen sei, zwei verschiedene Möglichkeiten: einmal können alle von einem Punkte ausgehenden Geraden noch durch einen zweiten Punkt hindurchgehen, zum andern können zwei gerade Linien, welche von einem Punkte ausgehen, in den Anfangspunkt zurückkehren, ohne einen weiteren Schnittpunkt zu besitzen. Die Formeln der beiden Systeme, auf welche diese Möglichkeiten führen, entsprechen ganz denen der Sphärik, so dass die analytische Behandlung

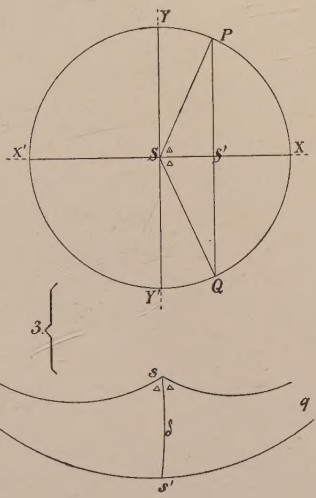
---

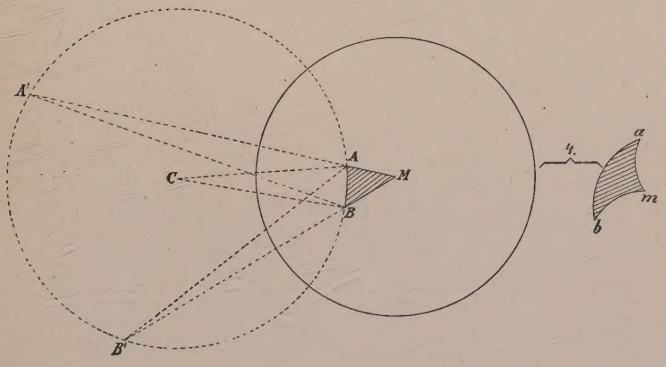
[1]) Wegen der Analogie der Massbestimmungen in den drei Formen der Geometrie mit den Beziehungen der Hyperbel, Ellipse und Parabel zur unendlich fernen Geraden hat Herr Klein die Nicht-Euklidische, sphärische und Euklidische Geometrie beziehlich die hyperbolische, elliptische und parabolische Geometrie genannt. (Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Mathem. Annalen, Bd. 4. S. 573—625.)

keinerlei Schwierigkeiten macht; die beiden Raumformen, die Riemannsche und die Kleinsche, zeigen grosse Übereinstimmung, sind jedoch nicht identisch. — Eine eingehendere Besprechung dieser Geometrieen gehört nicht hierher.


K1
S
K
K2
1.


Y
X'
O
X
S
P
Q
Y'
2.
s
p
q


Y
P
X'
S
S'
X
Y'
Q
3.
s
p
q
s'


A'
C
A
M
B
B'
4.
a
m
b